7- Мавзу: Vektorlar va ular ustida chiziqli amallar.

* Main Literature:

Mathematical Literacy for Humanists, Herbert Gintis, 73-80

Mathematical Literacy for Humanists, Herbert Gintis, 73-80.

Алгебра ва текисликдаги геометриянинг интеграцияси борасидаги буюк кашфиётлардан бири француз файласуфи Рене Декарт номи билан боғлиқ. Декартнинг таъкидлашича текисликдаги Евклид геометриясини олиб (x,y) уни тартибланган ҳақиқий сонлар жуфтлиги билан боғлаш

У айлана кўринишидаги квадрат тенгламанинг ечими эканлигини аниқлади. Бу ерда r>0 айлана радиуси. Аналитик геометрия икки ўлчамли фазо текислиги билан пайдо бўлди. Лекин жараён бу ерда тугамади ва балки нуқтани фазони юзага келишига сабаб бўлувчи тартибланган n та ҳақиқий сонлар тўплами () билан мос

қўйилишига олиб келди.

The discovery of a way to integrate algebra and plane geometry was among the greatest of the many achievements of the reknown French philosopher René Descartes. Descartes noticed that if you take Euclid's plane geometry and associate an ordered pair of real numbers (x, y) with each *point*, a *line* could be identified with the set of points satisfying the linear equation $ax + by = c$, where $a, b, c \in \mathbf{R}$. He then discovered that a circle could be identified with the solution to the quadratic equation $x^2 + y^2 = r^2$, where $r > 0$ is the radius of the circle. Analytic geometry was born, and with the notion of the plane as a two dimensional space $\mathbf{R}^2$. But the story does not end there, or even with the generalization of a point to an ordered set of n real numbers $(x_1, \ldots, x_n)$, giving rise to n-dimensional real space $\mathbf{R}^n$ for any natural number $n > 0$.

Евклид аксиомаларининг бирига кўра ҳар бир нуқталар жуфтлиги бир қийматли тарзда тўғри чизиқни аниқлайди. Алгебраик нуқтаи назаридан $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$ ва $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$ нуқталарга кўра қуйидаги тенгламалар жуфтлигини ечиш билан тўғри чизиқ тенгламасининг коэффицентларини топишимиз мумкин. $ax_i + by_i = c \qquad i = 1, 2$

a, b ва c лар орасида $x_1 y_2 \neq x_2 y_1$ муносабат бажарилганда қуйидаги боғланишлар мавжуд.

$$a = c\frac{y_2 - y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}, \qquad b = c\frac{x_2 - x_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \qquad (1)$$

Бу ерда c нол бўлмаган ҳақиқий сон.Агар $x_1 y_2 = x_2 y_1$ лекин $x_1 \neq x_2$, у ҳолда c=0 ва $a/b = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ шу тарзда тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтиб a/b. қияликга эга. Ниҳоят, агар $x_1 = x_2$, бўлса бу тўғри чизиқ горизантал тўғри чизиқдир.

One of Euclid's axioms is that every pair of points uniquely identifies a line. Algebraically we can find this line, given the two points $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$ and $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$, by solving the pair equations

$$ax_i + by_i = c \qquad i = 1, 2$$

for a, b, and c, getting, as long as $x_1 y_2 \neq x_2 y_1$,

$$a = c\frac{y_2 - y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}, \qquad b = c\frac{x_2 - x_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}, \qquad (6.1)$$

where c is any non-zero real number. If $x_1 y_2 = x_2 y_1$ but $x_1 \neq x_2$, then $c = 0$ and $a/b = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, so the line is through the origin with slope a/b. Finally, if $x_1 = x_2$, then the line is the horizontal line $\{(x, y) | x = x_1\}$.

r ҳақиқий сон ва $\mathbf{v} = (x, y)$ нуқта координаталари кўпайтмасини $r\mathbf{v} = r(x, y) = (rx, ry)$ кўринишида аниқлаймиз, икки нуқта координаталари йиғиндисини $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ қуйидагича аниқлаймиз , у ҳолда *V_1* , *V_2*лар билан аниқланган тўғри чизиқ нуқталар тўплами қуйидагича аниқланади. $\{\mathbf{v}^r = r\mathbf{v}_1 + (1 - r)\mathbf{v}_2 | r \in \mathbf{R}\}$.

As you can see, the description of the line between two points is quite inelegant and hard to use because we must discuss three distinct cases. Thus, every time we want to study something using a line, we have to deal with three separate cases. If we want to talk about k lines, we must deal with 3^k separate cases!

However, you could also note that if we define the product of a real number r and a point $\mathbf{v} = (x, y)$ as $r\mathbf{v} = r(x, y) = (rx, ry)$, and if we define the *addition* of two points as $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, then the line including $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$ simply as the set of points

$$\{\mathbf{v}^r = r\mathbf{v}_1 + (1 - r)\mathbf{v}_2 | r \in \mathbf{R}\}. \tag{6.2}$$

Буни кўрсатиш учун ҳар учала ҳолатни қараб чиқишимиз зарур, агар биз тўғри чизиқ ҳақиқатда *V_1*, *V_2* нуқталар орасида ётишига ишонч ҳосил қилсак, биз хусусий ҳолларга қайтмаймиз. Фараз қилайлик $x_1 y_2 \neq x_2 y_1$ бўлсин. У ҳолда (1) ўринли эканлигидан ихтиёрий нуқтани $(x, y) = r\mathbf{v}_1 + (1-r)\mathbf{v}_2$ кўринишида ифодаласак сиз аслида $ax_i + by_i = c \quad i = 1, 2$ эканлигини текширишингиз мумкин бу ерда a, b лар (1) да берилган ва c ни соддлаштириш билан топамиз. Мен ўқувчига $x_1 y_2 = x_2 y_1$ лекин $x_1 y_2 = x_2 y_1$ ва $x_1 = x_2$. бўлган ҳолатларни текширишни қолдираман. *V_1*, *V_2* нуқталар орасидаги кесма доим $\{r\mathbf{v}_1 + (1-r)\mathbf{v}_2 | r \in [0, 1]\}$. нуқталар тўплами кўринишида ишодаланиши мумкин. Ҳақиқатда ҳам $r\mathbf{v}_1 + (1-r)\mathbf{v}_2$ нуқта *V_1*, *V_2* нуқталар орасидаги кесмани $r : 1-r$ нисбатда бўлади. Мисол учун , $\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}_2, \mathbf{v}^1 = \mathbf{v}_1$. $\mathbf{v}^{1/2}$ -бу тўғри чизиқ сегментининг ўрта нуқтаси.

To show this, we do have to consider all three cases, but when we are satisfied that this set really is the line between $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$, we will never again have to consider special cases. So, suppose $x_1 y_2 \neq x_2 y_1$. Then the formulas (6.1) hold, and if we substitute in any point $(x, y) = r\mathbf{v}_1 + (1-r)\mathbf{v}_2$, you can check that indeed $ax + by = c$, where a and b are given by (6.1), and simplify, we get c. I leave it to the reader to check the cases $x_1 y_2 = x_2 y_1$ but $x_1 \neq x_2$, and $x_1 = x_2$.

It is also true that the line segment between $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$ is just the set of points $\{r\mathbf{v}_1 + (1-r)\mathbf{v}_2 | r \in [0, 1]\}$.[1] Indeed, the point $r\mathbf{v}_1 + (1-r)\mathbf{v}_2$ divides the line segment between $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$ in the ratio $r : 1-r$, so, for instance, $\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}^1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}^{1/2}$ is the midpoint of the line segment, and so on.

Бу тасдиқнинг энг содда исботи нуқталардан бирини энг қулай вазиятда жойлаштирамиз. Натижа нуқтанинг қаерда жойлашганлигига эмас, балки уларнинг бир-бирига нисбатан қандай жойлашганлигига боғлиқ бўлади.

Юқорида айтилган вазиятда v_2 нинг координаталар бошига кўчирилган вазиятини оламиз, у ҳолда $v_2 = \mathbf{0} = (0,0)$ бўлиб буни ноль вектор деб аталади. Бундан $\mathbf{v}^r = r\mathbf{v}_1$ нинг координаталар бошидан ва $\mathbf{v}_1$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун бу тўғри чизиқлар битта ва фақат битта. $\mathbf{v}^r$ тўғри чизиқ 0 ва $\mathbf{v}_1$ нуқталар орасидаги кесмани $r : 1 - r$ нисбатда бўлишини исботлашимиз учун нуқта ва нол вектор орасидаги масофани аниқлашимиз керак. Маълумки, $\mathbf{0}$ ва $\mathbf{v} = (x, y)$ орасидаги масофа $|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ билан аниқланади. Бундан агар $r \geq 0$ бўлса, у ҳолда $r|\mathbf{v}| = |r\mathbf{v}|$ бўлади. Демак, [illegible] нуқта 0 ва $\mathbf{v}_1$ кесмани $r : 1 - r$ нисбатда бўлар экан.

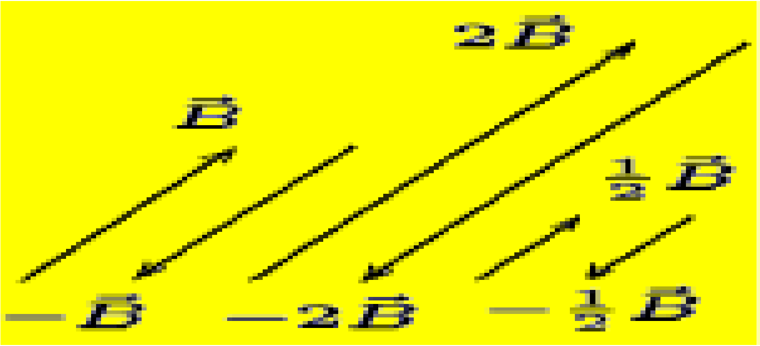
Иккита ҳар хил $\mathbf{v}_2$ ва $\mathbf{v}_1$ нуқталар орасидаги масофа $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ формула орқали топилади.

The easiest way to prove these statements is to move one of the points to a position where the calculations are easy, prove the statements there, and then show that the result does not depend on the absolute location of the points, but only on their relative location to each other. In this case, let's move $\mathbf{v}_2$ to the origin, so $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} = (0, 0)$ the so-called *zero vector*. In this case, $\mathbf{v}^r = r\mathbf{v}_1$, for which it is obvious that $\mathbf{v}^r$ is on a line with the same slope as the line through the origin and $\mathbf{v}_1$, so the two lines must be the same. To prove the assertion that $\mathbf{v}^r$ cuts the line segment between $\mathbf{0}$ and $\mathbf{v}_1$ in the ratio $r : 1 - r$, we must define the *distance* between a point and the zero vector $\mathbf{0}$. We define this just as you learned in algebra: the length of the line segment from $\mathbf{0}$ to $\mathbf{v} = (x, y)$ is $|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. From this definition, you can see that $r|\mathbf{v}| = |r\mathbf{v}|$ if $r \geq 0$. This shows that $\mathbf{v}^r$ divides the line segment between $\mathbf{0}$ and $\mathbf{v}_1$ in the ratio $r : 1 - r$.

Endi vector tushunchasini va uning hossalarini ko’rib chiqamiz.

Maktab geometriyasida kesma deb, to’g’ri chiziqning berilgan ikkita *A* va *B* nuqtalari orasida yotgan hamma nuqtalardan iborat qismiga aytiladi. *A* va *B* nuqtalar kesmaning uchlari deyiladi. Kesma o’z uchlarini ko’rsatish bilan belgilanadi «*AB*kesma», *AB* va *BA* kesmalar geometrik nuqtai nazardan bitta kesmani bildiradi , agar ularning yo’nalishlarini e’tiborga olsak ular turli kesmalar bo’ladi.

1 - ta’rif. Agar berilgan kesmaning uchlari tartiblangan bo’lsa , u holda bunday kesma yo’nalgan kesma deyiladi. Yo’nalgan kesmaning birinchi uchi uning boshi,ikkinchi uchi esa oxiri deyiladi.



1 – chizma

Yo’nalgan kesmani bilan belgilaymiz (1-chizma).

Yo’nalgan kesmaning uzunligi deb, kesma uzunligiga aytiladi va yoki *B* bilan belgilanadi.

2 - ta’rif. Agar va nurlar birxil (qarama-qarshi) yo’nalgan bo’lsa, va yo’nalgan kesmalar bir xil (qarama-qarshi) yo’nalishli deyiladi.

3 - ta’rif. Uzunliklari teng yo’nalishi bir xil bo’lgan barcha yo’nalgan kesmalar to’plamini ozod vektor yoki qisqacha vektor deb ataladi.(2-chizma)

(Introduction to Calculus Volume II. pp 1)

Vektor ustiga $"\longrightarrow"$ belgi qo'yilgan kichik lotin harflari $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}, \ldots$ bilan yoki qo'yiq qilib yozilgan kichik lotin harflari *a,в,c,…* bilan belgilanadi.

2-chizma

Vektor so'zi lotincha vector – so'zidan olingan bo'lib, tashuvchi, olib yuruvchi degan ma'noni bildiradi. Ta'rifdan vektor, uzunliklari teng bir xil yo'nalgan kesmalar to'plamidan iborat, ekanligi ravshan. Bu to'plamga tegishli har bir yo'nalgan kesma to'plamni to'liq aniqlaydi. Shuning uchun

agar $\overline{AB} \in \vec{a}$ bo'lsa, $\vec{a}$ vektorni $\overline{AB} = \vec{a}$ ko'rinishda yozishimiz mumkin.

A nuqta $\overline{AB}$ vektorning boshi, *B* nuqta esa $\overline{AB}$ vektorning oxiri deyiladi. Yo'nalgan $\overline{AB}$ kesmaning uzunligi $\overline{AB}$ vektor uzunligi, yoki moduli deyiladi va $|\overline{AB}|$ ko'rinishida belgilanadi.

4 - ta'rif. Uzunligi birga teng bo'lgan vektor birlik vektor yoki ort deyiladi.

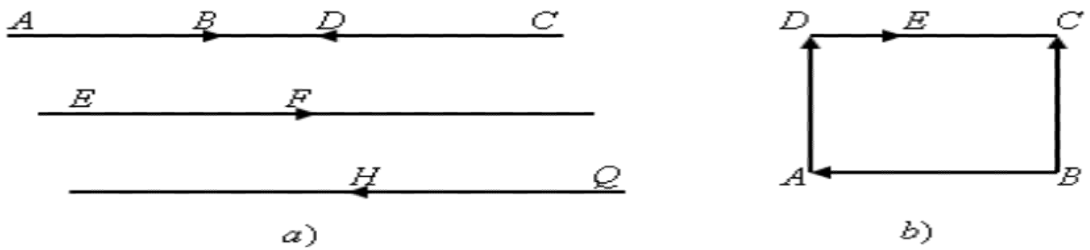
5 - ta'rif. Boshi bilan oxiri ustma – ust tushgan vektor nol vektor deyiladi.

Nol vector ko'rinishida yoki $\overline{AA}$, yoki $\overline{BB}$ ko'rinishida belgilanadi. Nol vektor yo'nalishi (aniq emas) aniqlanmagan.

- 6 - ta’rif. Agar $\overline{AB} \in \vec{a}$,$\overline{CD} \in \vec{b}$ yo’nalgan kesmalar bir xil (qarama-qarshi) yo’nalishli bo’lsa, $\overline{CD} \in \vec{b}$ va $\overline{CD} = \vec{b}$ lar birxil (qarama-qarshi) yo’nalishli deb aytiladi.
- Agar $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ lar bir xil yo’nalishli bo’lsa ko’rinishida, qarama – qarshi yo’nalishda bo’lsa ko’rinishda belgilaymiz.
- 7 - ta’rif. Agar ikkita $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ vektorlar bir to’g’ri chiziqda yoki parallel to’g’ri chiziqlarda yotsa, u holda bu vektorlarni kolleniar vektorlar deyiladi.
- 8 – ta’rif. Agar quyidagi shartlar o’rinli bo’lsa:
- 1) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning modullari teng ;
- 2) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yo’nalishlari bir xil bo’lsa,

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni teng vektorlar deyiladi va $\vec{a} = \vec{b}$ ko’rinishida yoziladi.

1. Agaruchtavektorbirtekislikdayokiparalleltekisliklardayotsa,



3-chizma

3-chizmada parallel to’g’ri chiziqlarda va *ABCD* kvadrat tomonlarida yotuvchi vektorlar ko’rsatilgan:

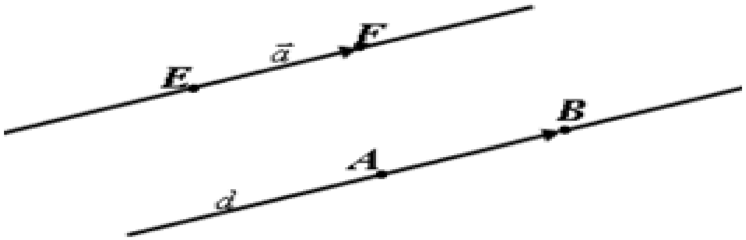
1) Bularning qaysi juftlari bir xil yo’nalishga va qaysi juftlari qarama-qarshi yo’nalishga ega,

2) Qaysi juftlari kollinear bo’ladi,

3) Qaysi juftlari teng, qaysi juftlari teng emas.

3-chizma

Vektorlar ustidagi chiziqli amallar



4-chizma

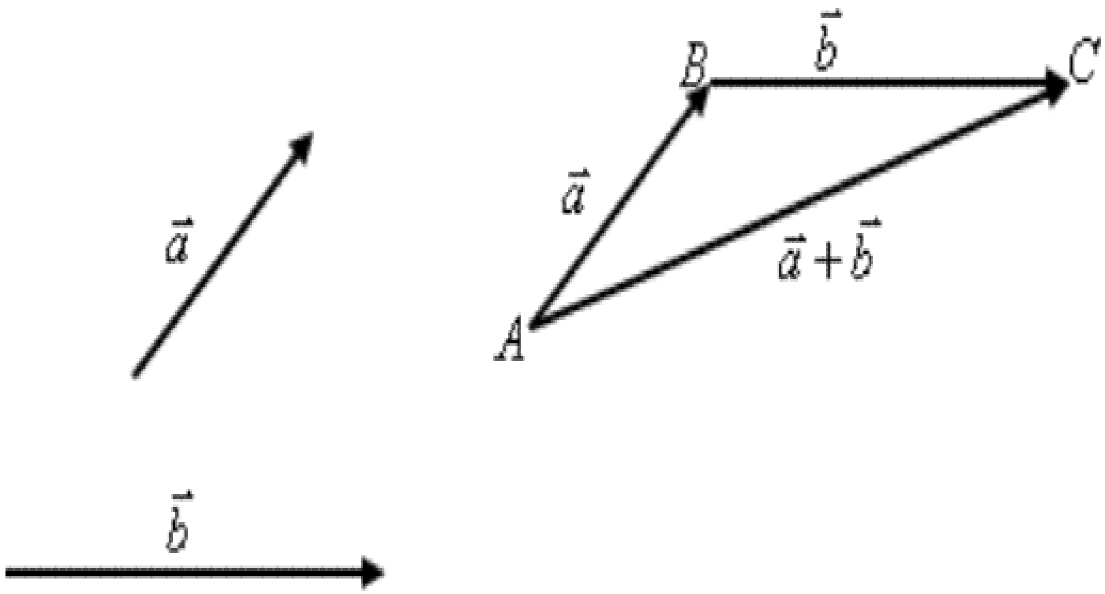
Tekislikda $\vec{a} = \overrightarrow{EF}$ va *A* nuqta berilgan bo’lsin. *A* nuqtadan *EF* to’g’ri chiziqqa parallel *d* to’g’ri chiziq o’tkazamiz. (4-chizma) *A* nuqtadan ko’rsatilgan yo’nalishda $\vec{a}$ vektor uzunligini o’lchab qo’yib

B nuqtani topamiz $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Shunday qilib ni *A* nuqtadan qo’ydik, ya’ni ko’chirdik.

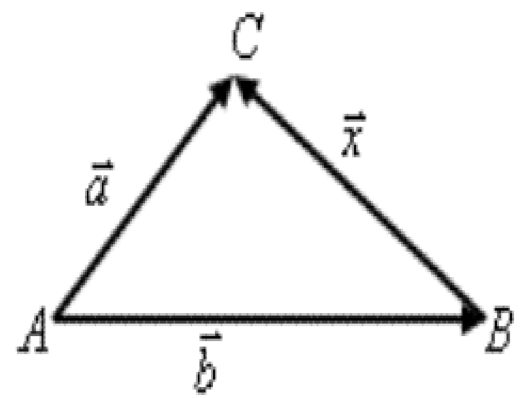
9-Ta’rif.Ikkita va vektorlarning yig’indisi deb, ixtiyoriy *A* nuqtadan $\vec{a}$ vektorni qo’yib, uning oxiri *B* nuqtaga $\vec{b}$ vektorni qo’yganda boshi $\vec{a}$ vektorning boshi *A* nuqtada oxiri $\vec{b}$ vektorning oxiri *C* nuqtada bo’lgan vektorga aytiladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi $\vec{a}+\vec{b}$ kabi belgilanadi. (5- chizma)

Vektorlarni qo'shish ta'rifidan istalgan uchta *A* ,*B* va *C* nuqtalar uchun $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikn ivektorlarni qo'shishning uchburchak qoidasi deyiladi



5-chizma



6-chizma

10 - Ta'rif. $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi deb, shunday $\vec{x}$ vektorga aytiladiki, ularu chun $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$ tenglik o'rinli bo'ladi. U holda $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$.(6- chizma)

Ikkita vektorning ayirmasi hamma vaqt mavjud va bir qiymatli aniqlanishini isbotlash mumkin.

11 - Ta'rif. $\vec{a}\neq\vec{0}$ vektorning $\alpha\in R$ songa ko'paytmasi deb quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\vec{p}$ ga aytiladi va $\vec{p} = \alpha\cdot\vec{a}$ ko'rinishda yoziladi.

1) $|\vec{p}|=|\alpha|\cdot|\vec{a}|$;

2) $\vec{p}$ vektor $\vec{a}$ ga kollinear.

3) Agar $\alpha>0$ bo'lsa $\vec{p}$ va $\vec{a}$ vektorlar bir xil yo'nalgan, agar $\alpha<0$ bo'lsa, $\vec{p}$ va $\vec{a}$ vektorlar qarama- qarshi yo'nalgan bo'ladi.

1.1-teorema. Vektorlarni qo'shish va songa ko'paytirish quyidagi xossalarga ega.

1°. Agar $\vec{A}$ va $\vec{B}$ vektorlar to'plamiga tegishli bo'lsa u holda ularning yig'indisi ham shu to'plamga tegishli (yopiqlik)

2°. $(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$ (qo'shishga nisbatan assotsiativ)

3°. Ixtiyoriy $\vec{A}$ vector uchun shunday $\vec{0}$ vector mavjudki ular uchun: $\vec{A}+\vec{0}=\vec{A}$ munosabat o'rinli hamda $\vec{0}$ vector qo'shishga nisbatan neytral element.

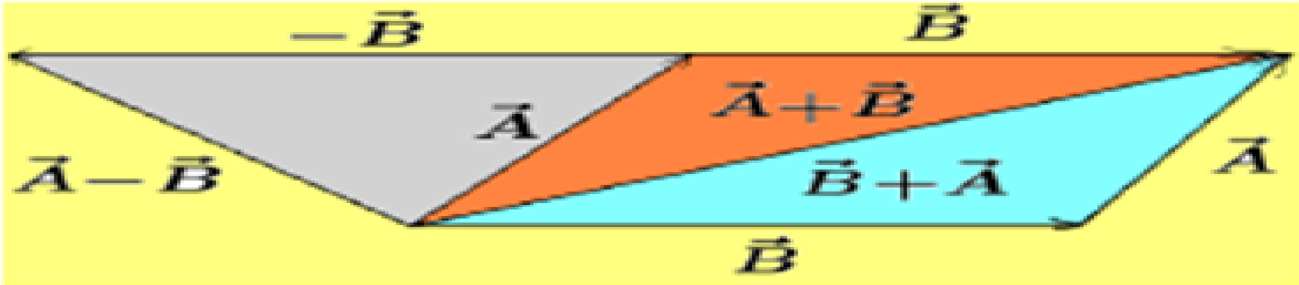
4°. Harbir $\vec{A}$ vector uchun shunday $\vec{E}$ vector mavjudki ular uchun:

$\vec{A}+\vec{E}=\vec{0}$ (bunda $\vec{E}$ ni $\vec{A}$ ga qarama-qarshi vector deyiladi va $\vec{E}=-\vec{A}$).

5°. $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$ (qo'shishga nisbatan kommutativ)

6°. Ixtiyoriy m haqiqiy son va ixtiyoriy $\vec{A}$, $\vec{B}$ vectorlar uchun: $m(\vec{A}+\vec{B})=m\vec{A}+m\vec{B}$

(Introduction to Calculus Volume II. pp 3)



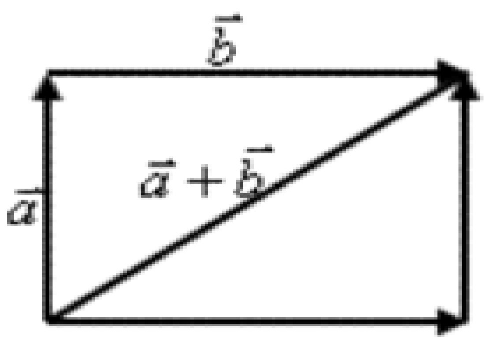
1°.Itiyoriy ikki haqiqiy $\alpha,\ \beta$ son va ixtiyoriy $\vec{a}$ vector uchun:

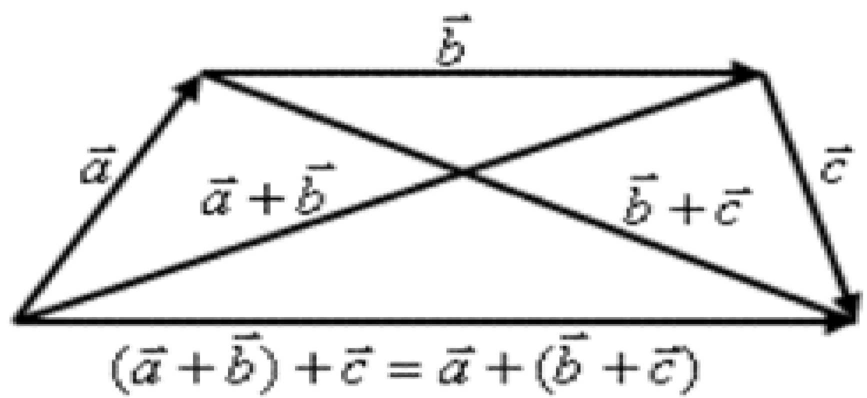
$(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\ \vec{a}$

2°. Ixtiyoriy ikki haqiqiy $\alpha,\ \beta$ son va ixtiyoriy $\vec{a}$ vector uchun:

$(\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{a}=\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{a})$

3°. Ixtiyoriy $\vec{a}$ vector uchun: $1\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot 1=\vec{a}$





Isbot. 1, 2 xossalarning isbotini 7, 8 chizmalardan ko'rish mumkin.

3^0 va 8^0 xossalar ravshan. 4^0 ga qaraylik. Agar $\vec{a}=\overrightarrow{MN}$ bo'lsa, $-\vec{a}$ sifatida $\overrightarrow{NM}$ ni olish mumkin. Vektorlarni qo'shish ta'rifiga asosan

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{MM}=\vec{O}$$

7^0 xossalarni talabalar mustaqil ish sifatida o'rganadi.

Vektorlarning chiziqli bog'liqligi.

Ta'rif. Ixtiyoriy $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n$, vektorlar sistemasi va $c_1, c_2, \dots, c_n$, haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin.

$$\vec{A} = c_1\vec{A}_1 + c_2\vec{A}_2 + \dots + c_n\vec{A}_n,$$

Vektorni berilgan $\vec{A}$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deyiladi. Bunda $\vec{A}$ vektor $c_1, c_2, \dots, c_n$, vektorlar sistemasi orqali chiziqli ifodalangan deyiladi. $c_1, c_2, \dots, c_n$, sonlar chiziqli kombinatsiya koeffitsentlari deyiladi.

12-ta'rif. Ixtiyoriy $\vec{A}$ va $\vec{B}$ vektorlarning, k_1, k_2 haqiqiy sonlar bilan berilgan chiziqli kombinatsiyasi $k_1\vec{A} + k_2\vec{B} = \vec{0}$ (3.3)

Koeffitsentlarning kamida bittasi noldan farqli bo'lganda (3.3) bajarilsa, u holda $\vec{A}$ va $\vec{B}$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq deyiladi.

Agar (3.3) tenglik k_1, k_2 sonlarning hammasi nolga teng bo'lgandagina o'rinli bo'lsa, $\vec{A}$ va $\vec{B}$ vektorlar sistemasi chiziqli erkli deyiladi.

1.2-teorema. Agar (3.1) vektorlar sistemasining biror vektori nol vector bo'lsa, u holda bu vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'ladi.

(Introduction to Calculus Volume II. pp 3-4)

Isbot.Faraz qilaylik $\vec{a}_k = \vec{0}$ bo'lsin, u holda $\alpha_k \neq 0, \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{k+1} = ... = \alpha_n = 0$, sonlar uchun $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$ munosabat o'rinli bo'ladi. Demak, ta'rifga asosan (3.1) vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq.

Quyidagi teoremalarni talabalar o'zlari isbotlasin.

1.2-teorema.Agar (3.1) vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'lsa, sistemaning kamida bitta vektori uning qolgan vektorlari orqali chiziqli ifodalanadi.

1.3-teorema. Ikkita vector chiziqli bog'liq bo'lishi uchun ularning kollinear bo'lishi zarur va etarli.

1.4-teorema. Uchta vektorc hiziqli bog'liq bo'lishi uchun ularning komplanar bo'lishi zarur va etarli.