14-mavzu: FAZODA TO'G'RI CHIZIQ VA TEKISLIK TENGLAMALARI.

Topic-14. IN SPACE STRAIGHT LINE AND PLAINS EQUATIONS

Bibliography:Csaba Vincze and Laszlo Kozma 'College Geometry' March 27, 2014 pp 215-225

Fazoda tekislik tenglamasi.

Bizga tekislikka tegishli $A_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqta va unga perpendikulyar biror $\vec{n}$ vektor berilgan bo'lsin. Tekislikning ixtiyoriy $A(x; y; z)$ nuqtasi uchun $\overline{A_0A}$ vektor $\vec{n}$ vektorga perpendikulyar bo'ladi (19.1 chizma). Bundan

$$\overrightarrow{A_0A} \cdot \vec{n} = 0 \qquad (*)$$

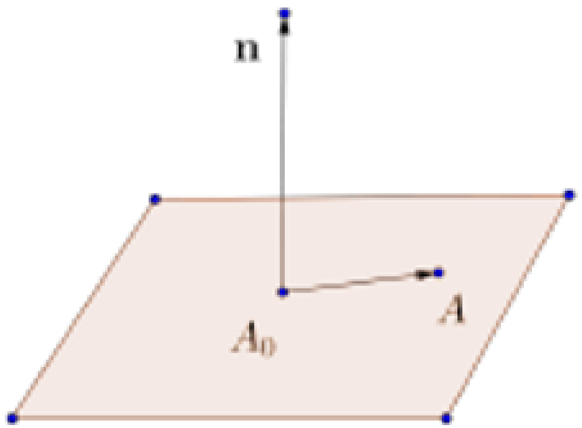
Aytaylik a, b, c sonlar $\vec{n}$ vektorning $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ bazisdagi koordinatalari bo'lsin. O nuqta koordinatalar boshi ekanidan

$$\overrightarrow{A_0A} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA_0}$$

U holda (*) dan

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad (**)$$

tekislik tenglamasi kelib chiqadi.



19.1 chizma

Demak ixtiyoriy tekislik tenglamasi x, y, z koordinatalarga nisbatan chiziqli ekan. Shuni e'tiborga olsak ixtiyoriy tekislik tenglamasi

$$ax + by + cz + d = 0$$

ko'rinishida bo'ladi.

Agar x_0, y_0, z_0 berilgan tenglamaning yechimi bo'lsa, u holda

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$$

tenglikdan

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad (***)$$

Formula kelib chiqadi.

Misollar:

1. Berilgan ikkita (x_1, y_1, z_1) va (x_2, y_2, z_2) nuqtalar biror tekislikka nisbatan simmetrik bo'lsa, bu tekislik tenglamasini tuzing.

2. $ax+by+cz+d_1=0$ va $ax+by+cz+d_2=0$ $(d_1 \neq d_2)$ tekisliklarning parallel ekanini ko'rsating.

3. $(ax+by+cz+d)^2-(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)^2=0$ tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamining geometrik o'rni nimadan iborat.

4. $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ va $x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$

   Ikkita sferaning kesishishidan hosil bo'lgan aylanadan o'tadigan tekislik tenglamasini tuzing.

Koordinatalar sistemasiga nisbatan tekislikning joylashishi

Bizga

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (1)$$

tekislik berilgan bo'lsin. Quyidagi hollarni qaraymiz:

($\vec{n}$ vector berilgan tekislikning normal vektori bo'lsin).

1. $a = 0,\ b = 0$. Bu holatda $\vec{n}$ vektor z o'qiga parallel bo'ladi. Ya'ni (1) tekislik xy tekisligiga parallel bo'ladi va $d = 0$ bo'lsa, xy tekisligi bilan ustma-ust tushadi.

2. $b = 0, c = 0$. Bu holatda (1) tekislik yz tekisligiga parallel bo'ladi va $d = 0$ bo'lsa, yz tekisligi bilan ustma-ust tushadi.

3. $a = 0, c = 0$. Bu holatda (1) tekislik xz tekisligiga parallel bo'ladi va $d = 0$ bo'lsa, xz tekisligi bilan ustma-ust tushadi.

4. $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$. Bu holatda $\vec{n}$ vector x o'qiga perpendikulyar bo'ladi. Ya'ni (1) tekislik x o'qiga parallel bo'ladi va $d = 0$ bo'lsa, x o'qidan o'tadi.

5. $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$. Bu holatda (1) tekislik y o'qiga parallel bo'ladi va $d = 0$ bo'lsa, y o'qidan o'tadi.

6. $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$. Bu holatda (1) tekislik z o'qiga parallel bo'ladi va $d = 0$ bo'lsa, z o'qidan o'tadi.

7. $d = 0$ holida (1) tekislik koordinata boshidan o'tadi.

Agar (*) tekislikning barcha koeffisientlari noldan farqli bo'lsa tenglikning ikkala tomonini $-d$ ga bo'lish mumkin. Natijada

$$\frac{-d}{a} = \alpha, \quad \frac{-d}{b} = \beta, \quad \frac{-d}{c} = \gamma$$

(1) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1 \qquad (*)$$

α, β, γ sonlar tekislikni koordinata o'qlari bilan kesishishidan hosil bo'lgan kesmalarga teng.

Haqiqatdan ham tekislik x o'qini ($y = 0, z = 0$) $(\alpha, 0, 0)$ nuqtada, y o'qini ($x = 0, z = 0$) $(0, \beta, 0)$ nuqtada, z o'qini ($x = 0, y = 0$) $(0, 0, \gamma)$ nuqtada kesib o'tadi.

Agar tekislik xy tekisligiga perpendikulyar bo'lmasa ($c \neq 0$) tekislikni quydagicha tenglama bilan yozish mumkin.

$$z = px + qy + l$$

Misollar:

1.Quyidagi tekislik $x(y,z)$o'qining musbat yo'nalishi bilan kesishish shartini toping.

$$ax + by + cz + d = 0$$

2. $ax + by + cz + d = 0$ tekislik koordinata o'qlari bilan kesishishidan hosil bo'lgan tetraedrning hajmini toping.

3.Quyidagi sakkizta $|x| + |y| + |z| = a$ tekisliklarning kesishishidan hosil bo'lgan figuraning oktaedr ekanini ko'rsating va uning markazi koordinatalar boshida joylashganini isbotlang.

Tekisliklarning o'zaro vaziyati

Faraz qilaylik bizga ikkita

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Tekisliklar berilgan bo'lsin.

Qanday shart bajarilganda bu tekisliklar: a) parallel b) perpendikulyar bo'lish shartini topaylik.

Ikkita tekislik parallel bo'lishi uchun ularning mos normal vektorlari $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ parallel bo'ladi. Bundan tekisliklarning parallellik sharti

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

kelib chiqadi.

Ikkita tekislik perpendikulyar bo'lishi uchun ularning mos normal vektorlari $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ perpendikulyar bo'ladi. Bundan tekisliklarning perpendikulyarlik sharti

$$\vec{n}_1 \vec{n}_2 = 0 \text{ yoki } a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

kelib chiqadi.

Tekisliklar orasidagi burchakni topish formulasini keltirib chiqaraylik.

θ orqali $\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ vektorlar orasidagi burchakni belgilasak ikkita tekislik orasidagi burchak ham θ ga teng bo'ladi.

$$\vec{n}_1\vec{n}_2 = |\vec{n}_1||\vec{n}_2|\cos\theta$$

ekanidan quyidagi formula kelib chiqadi.

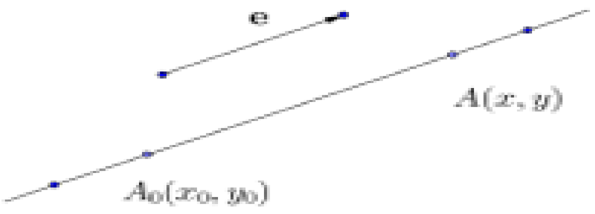
$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

To'g'ri chiziq tenglamalari

Ma'lumki, ixtiyoriy to'g'ri chiziq ikkita tekislikning kesishishidan hosil bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq tenglamasini quyidagicha yozishimiz mumkin.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Izoh: (*) tenglama to'g'ri chiziq tenglamasini aniqlashi uchun ikkita erkli tenglama birgalikda qaralishi zarur.



19.2 chizma

Aytaylik $A_0(x_0, y_0, z_0)$ to'g'ri chiziqdagi fiksirlan nuqta bo'lib, $A(x, y, z)$ to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Hamda $\vec{e}(k, l, m)$ bu to'g'ri chiziqqa parallel noldan farqli vector bo'lsin (19.2 chizma). U holda $\overline{A_0 A}$ va $\vec{e}$ vektorlar parallel bo'lib ularning koordinatalari proporsional bo'ladi. Ya'ni

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m} \qquad (**)$$

(**) tenglamaga to'g'ri chiziqning ***kanonik*** tenglamasi deyiladi.

Faraz qilaylik to'g'ri chiziq (*) tenglama bilan ifodalangan bo'lsin. Biz uning tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiraylik. Bu uchun biz to'g'ri chiziqning biror A_0 nuqtasini va unga parallel $\vec{e}$ vektorni topishimiz yetarli.

Biror $\vec{e}(k, l, m)$ vektor to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, u holda bu vektor (*) tekisliklarning har biriga parallel bo'ladi. Bundan $\vec{e}(k, l, m)$ vector tekislikning har bir normal $\vec{n}_1(a_1, b_1, c_1)$ va $\vec{n}_2(a_2, b_2, c_2)$ vektorlarga perpendikulyar bo'ladi.

Demak, doim k, l, m lar

$$\begin{cases} a_1k + b_1l + c_1m = 0 \\ a_2k + b_2l + c_2m = 0 \end{cases} \qquad (***)$$

tenglamalarni qanoatlantiradi.

(*) tenglamalar sistemasidan biror x_0, y_0, z_0 yechimlarni va (***) tenglamalar sistemasidan biror k, l, m yechimlarni olamiz.

$$k = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad l = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

To'g'ri chiziqni parametrik ko'rinishda ham ifodalash mumkin. Buning uchun (**) tenglamadagi uchala nisbarni ham biror t o'zgaruvchiga tenglashtiramiz.

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m} = t$$

Bundan

$$x = kt + x_0, y = lt + y_0, z = mt + z_0 \quad (1)$$

(1) tenglamaga to'g'ri chizi qning parametrik tenglamasi deyiladi.

To'g'ri chiziq koordinatalar sistemasiga nisbatan quyidagicha joylashishi mumkin.($\vec{e}(k,l,m)$ to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori bo'lsin).

1. Agar $m=0$ to'g'ri chiziq xy tekisligiga parallel bo'ladi.

2. Agar $l=0$ to'g'ri chiziq xz tekisligiga parallel bo'ladi.

3. Agar $k=0$ to'g'ri chiziq yz tekisligiga parallel bo'ladi.

4. Agar $k=0, l=0$ bo'lsa, to'g'ri chiziq z o'qiga parallel bo'ladi.

5. Agar $l=0, m=0$ bo'lsa, to'g'ri chiziq x o'qiga parallel bo'ladi

6. Agar $k=0, m=0$ bo'lsa, to'g'ri chiziq y o'qiga parallel bo'ladi

Misollar:

1. Qanday shart bajarilganda (**) kanonik tenglama bilan berilgan to'g'ri chiziq

$x(y,z)$o'qini kesadi? Qanday shart bajarilganda u $xy(xz,yz)$ tekisligiga parallel bo'ladi?

2.O'zaro juft-jufti bilan parallel bo'lmagan tekisliklarga nisbatan teng uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o'rni to'g'ri chiziq bo'lishini isbotlang.

3. $z = axy$ sirtning har bir nuqtasidan ikkita turli shu sirtda yotuvchi to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin ekanligini isbotlang.

4.Agar to'g'ri chiziqlar

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

va

$$\begin{cases} a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar bilan aniqlangan bo'lib, ular kesishsa

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0$$

tenglikni isbotlang.