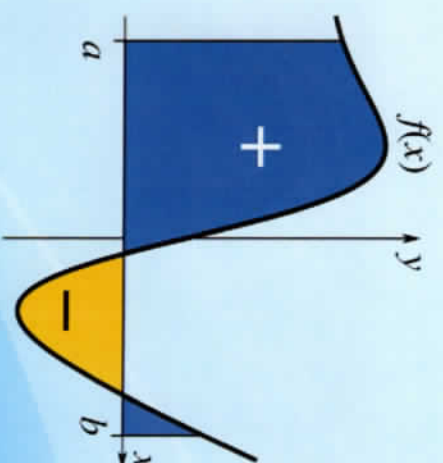


A.G.ABDURAXMANOV

# ANIQMAS VA ANIQ INTEGRALLAR

(Matematik analiz)



O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI  
OILY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI  
CHIRCHIQ DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI

« ALGEBRA VA MATEMATIK ANALIZ »  
KAFEDRASI

A.G.ABDURAXMANOV

# ANIQMAS VA ANIQ INTEGRALLAR

(Matematik analiz)

*Kunduzgi, kechki va sirtqi ta'lim talabalari uchun*

*O'quv qo'llanma*

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OILY VA O'RTA  
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI CHIRCHIQ DAVLAT  
PEDAGOGIKA UNIVERSITETI  
AXBOROT RESURS MARKAZI

«BOOK TRADE 2022»  
Toshkent – 2022

UO'K: 37.018(075.10.53)  
K BK: 78.2ya75.23

**A.G.Abduraxmanov "Aniqmas va aniq integrallar" (Maple dasturi asosida).** Kunduzgi, kechki va sirtqi ta'lim talabarlari uchun o'quv qo'llanma. – T.: «BOOK TRADE 2022» nashriyoti, 2022. – 108 b.

O'quv qo'llanma 29.08.2020 da tasdiqlangan "Matematik analiz fan dasturi" asosida "Matematik analiz" fani bo'yicha 60110600- Matematika va informatika yo'nalishida tahsil olayotgan va 60110700- fizika va astronomiya ta'lim yo'nalishida tahsil olayotgan talabalar uchun mo'ljallangan. Unda kunduzgi, kechki va sirtqi ta'lim talabarlari uchun oliy matematikaning aniqmas va aniq integrallar bo'limiga tegishli masala va misollarni mustaqil ishlashlari uchun kerakli nazariy va amaliy mavzular berilgan. Har bir mavzuga qisqacha nazariy ma'lumotlar keltirilib, ularning qo'llanishi ko'plab misollarda tushuntirilgan.

#### **Taqrizchilar:**

**Raximov A.A.** – Uzbekiston Milliy Universiteti "Algebra va funksional analiz" kafedrasi professori,  
**Gel'fanova D.D.** – Fevzi Yaqubov nomli Qirim injener-pedagoglar Universiteti "Matematika" kafedrasi dotsenti (Rossiya),

#### **Ichki taqrizchi:**

**Seytov A.J.** – Chirchiq davlat pedagogika universiteti "Algebra va matematik analiz" kafedrasi dotsenti.

ISBN 978-9943-8774-9-8

## **ANIQMAS VA ANIQ INTEGRALLAR (MAPLE DASTURI ASOSIDA)**

### **SO'Z BOSHI**

Ushbu o'quv qo'llanmaning maqsadi talabaga integrallash texnikasini va ma'lum integralarni qo'llash uchun turli xil masalalarni echish qobiliyatini o'rgatishdir. Bunda zamon talabidan kelib chiqqan xolda "Maple" dasturidan foydalanildi.

O'quv qo'llanma uchta bobdan iborat bo'lib har bir bob bir nechta paragraflardan tashkil topgan. Har bir bob asosiy ta'riflar, formulalar, teoremlarni isbotsiz o'z ichiga olgan qisqa nazariy kirish bilan boshlanadi. Vazifalarni tanlashda, avvalambor, integrallash usullarini o'zlashtirish yo'lida talabalar duch kelishi mumkin bo'lgan qiyinchiliklarni hisobga olishga harakat qilindi.

Ushbu o'quv qo'llanmada ko'rsatilgan mavzular bo'yicha batafsil echimlar bilan 53 ta misol keltirilgan. Yassi figuralarining yuzalari, egri chiziq uzunligini, fazoviy jismlarining hajmlarini hisoblashda echimlar aniqlik uchun "Maple" dasturida raqamlar va batafsil tushuntirishlar bilan taqviylangan.

Mazkur kitob mavjud Davlat Ta'lim Standartida belgilangan va matematik ta'lim mazmuniga kiritilgan "Matematik ahali" kursining aniqmas va aniq integrallar mavzularini o'zlashtirishda talabalarga o'quv qo'llanma sifatida tayyorlangan. Ushbu qo'llanma "Funkttsiyalar integrali" moduliga qo'shimcha bo'lib, unda "Aniqmas integral", "Aniq integral va ularning qo'llanishi" va "Hosmas integral" mavzularidagi individual topshiriqlar mavjud. Qo'llanma pedagogika institutlarining aniq va tabiiy fanlar hamda oliy ta'lim muassasalarining texnika va iqtisodiy mutaxassisliklar bo'yicha talim olayotgan birinchi bosqich talabalariga mo'ljallangan.

Ushbu o'quv qo'llanma talabalarga moduli amalga oshirish va ushbu materialni o'rganish bo'yicha mustaqil ishlarda yordam beradi deb umid qilaman.

O'quv qo'llanmani yozishda rus va o'zbek tillarida chop etilgan mavjud adabiyotlardan foydalanildi.

O'quv qollama haqida fikr bildirgan barcha taklif va fikr-  
mulohazalarni minnatdorchiilik bilan qabul qilaman.

**Shartli belgilar:**

- V -- ihtiyoriy, harqanday
- E -- shunday

**1. ANIQMAS INTEGRALLAR**

**ASOSIY TUSHUNCHA VA TOREMALAR.**

**1.1. Aniqmas integral va uni hisoblash usullari.**

$f(x)$  va  $F(x)$  funksiyalar biror  $(a,b)$  intervalda aniqlangan bo'lib,  $F(x)$  funksiya  $(a,b)$  intervalda differensiallanuvchi bo'lsin.

Quyidagi masalani qaraymiz:  $\exists F(x)$  funksiyani topish kerakki,  $\forall x \in (a,b)$  uchun  $F'(x) = f(x)$  bo'lsin.

**1-Ta'rif.** Agar  $\forall x \in (a,b)$  uchun  $F'(x) = f(x)$  bo'lsa, u holda  $F(x)$  funksiya  $(a,b)$  intervalda  $f(x)$  funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deyiladi.

Tabiiy savol tug'iliadi: har qanday funktsiya uchun boshlang'ich funktsiya mavjudmi?

Masalan,  $y = \operatorname{sgn} x$  funksiyaning  $x = 0$  nuqtani o'z ichiga olmaydigan har qanday oraliqda boshlang'ich funktsiyasi mavjud bo'lib,  $x = 0$  nuqtani o'z ichiga oladigan har qanday oraliqda boshlang'ich funktsiyasi mavjud emas. Haqiqatdan ham,  $x = 0$  nuqtani o'z ichiga olmaydigan har qanday oraliqda  $y = \operatorname{sgn} x$  funktsiya o'zgarmas bo'ladi. Masalan, [1;2] kesmada

$\operatorname{sgn} x = 1$  bo'lib, shu kesmada uning har qanday boshlang'ich funktsiyasi  $F(x) = x + C$  ko'rinishda bo'ladi, bunda  $C$  - o'zgarmas son. Endi,  $x = 0$  nuqtani o'z ichiga oluvchi oraliqni qaraymiz. Teskarisini faraz qilaylik, masalan,  $[-1;1]$  kesmada  $y = \operatorname{sgn} x$  funktsiya  $F(x)$  boshlang'ich funktsiyaga ega bo'lsin. U holda  $F'(x) = \operatorname{sgn} x$  ekanligidan, boshlang'ich funktsiya boshlang'ich funktsiya  $x = 0$  nuqtada birinchi tur uzilishga ega ekanligi kelib chiqadi. Bu esa Lagranj teoremasining natijasiga zid.

Endi funktsiya boshlang'ich funktsiyasi mavjudligining etarli shartini belirlaymiz.

**Teorema.** Agar  $f(x)$  funksiya  $(a,b)$  intervalda uzluksiz bo'lsa, u holda  $f(x)$  funksiyasining boshlang'ich funktsiyasi mavjud bo'ladi.

Ma'lumki,  $f(x)$  funktsiya boshlang'ich funktsiya bo'lsa,  $F(x) + c$  ham boshlang'ich funktsiya bo'ladi.

**2-Ta'rif.**  $(a,b)$  intervalda berilgan  $f(x)$  funktsiya boshlang'ich funktsiyasining umumiy ifodasi  $F(x) + c$  shu  $f(x)$  funksiyasining aniqmas integrali deb ataladi va

$$\int f(x) dx$$

kabi belgilanadi.

Demak,

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (1)$$

Odatda,  $f(x)$  funksiya boshlang'ich funksiyasining grafigiga **integral chiziq** deb ataladi. Aniqmas integrallarning geometrik ma'nosi - integral chiziqning o'lasini anglatadi. Bunda  $y = F(x) + C$  chiziqning o'lasini bitta integral chiziqni  $oy$  o'qi bo'ylab parallel ko'chirish natijasida hosil qilinadi.

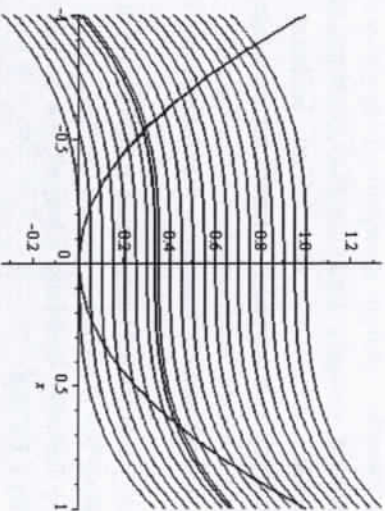
**Misol.**  $y = x^2$  funksiya uchun (0;1) nuqtadan o'tuvchi integral chiziqni toping.

$\triangleright y = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$  - kubik parabolalar oilasini ifodalaydi. Boshlang'ich shartdan,

$$1 = 0 + C \Rightarrow y = \frac{x^3}{3} + 1 \text{ kelib chiqadi. } \triangleright$$

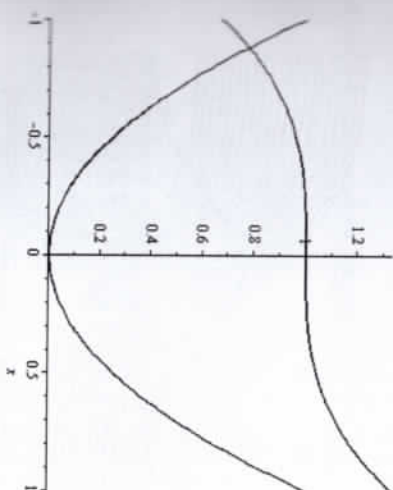
$\triangleright$  with (Student[Calculus1]) :

$\triangleright$  AntiderivativePlot( $x^2, x = -1..1, showclass$ )



A graph of  $f(x) = x^2$ . The antiderivatives  $F(x)$  for which its value at the left end point is 0. The members of the family of antiderivatives.

AntiderivativePlot( $x^2, x = -1..1, value = [0, 1]$ )



A graph of  $f(x) = x^2$ . The antiderivative  $F(x)$  for which its value at 0 is 1.

**Teohi** Ma'lumki, elementar funksiyaning hosilasi yana elementar funksiya bo'lar edi, lekin integral olish uchun bu tasdiq o'rinni bo'lishi shart emas, ya'ni ba'zi bir elementar funksiyalarning integralari elementar funksiyalar bo'lmay qolishi mumkin. Masalan, ushbu

1.  $\int e^{x^2} dx,$
2.  $\int \cos x^2 dx,$
3.  $\int \sin x^2 dx,$
4.  $\int \frac{dx}{\ln x} \quad (x > 0, x \neq 1),$
5.  $\int \cos^2 x \, dx \quad (x \neq 0),$
6.  $\int \frac{\sin x}{x} dx.$

Integralarning har biri elementar funksiyalar yordamida ifodalanamaydi. Bu funksiyalar amaliyotida ko'p uchraganligi sababli ularning qiymatlarini hisoblash uchun alohida jadvallar tuzilgan va ularning graflari yasalgan. Shu yo'l bilan elementar funksiyalarda integrallanmaydigan funksiyalar ham ko'rig o'rganilgan. Ushbu funksiyalarning grafigini keltiramiz.

$\triangleright$  with (Student[Calculus1]) :

$\triangleright$  Theorem summary :

$$F(x) = \int e^{x^2} dx$$